Inspectoratul Şcolar al Municipiului Bucureşti

Olimpiada de Matematică
Faza locală, 17 februarie 2007
Clasa a X-a

Subiectul I (Gazeta Matematică)

a) Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ sistemul $|z| = \left|\dfrac{a}{z}\right| = |z-a|$, unde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

b) Rezolvaţi ecuaţia $\log_x(x + 10{,}25) = \lg 10{,}5$.

Subiectul II

Considerăm funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care au proprietatea: pentru orice puncte distincte $A(p, f(p))$ şi $B(q, f(q))$ situate pe graficul funcţiei, dreapta AB taie axa Oy în punctul $(0, -pq)$.

a) Determinaţi funcţiile de gradul doi care au această proprietate.

b) Demonstraţi că orice funcţie cu această proprietate este o funcţie de gradul doi.

Subiectul III

a) Demonstraţi că există un hexagon convex, cu unghiurile congruente şi cu laturile de lungimi $1, 2, 3, 4, 5, 6$ (nu neapărat în această ordine).

b) Demonstraţi că există exact două tipuri de hexagoane care îndeplinesc condiţiile de la a).

Subiectul IV

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ şi $\mathcal{P}(A)$ mulţimea celor 2^n părţi ale mulţimii $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. O funcţie f va fi numită *ascendentă* dacă $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ şi, pentru orice $X, Y \subset A$, are loc relaţia: $X \subset Y \Rightarrow f(X) \subset f(Y)$.

a) Demonstraţi că dacă f este o funcţie ascendentă atunci există $B \subset A$ astfel încât $f(B) = B$.

b) Demonstraţi că pentru orice k întreg, $1 \leq k \leq 2^n$, există o funcţie ascendentă f_k astfel încât ecuaţia $f_k(X) = X$, $X \subset A$ să aibă exact k soluţii.

Fiecare subiect se notează de la 1 la 10. Timp de lucru: 3 ore